二面体群 D_5 のリー微分代数について

三　川　　　敦

Abstract

F を標数 0 の体，G を群とする．群代数 FG にブラケット積 $[f, g] = fg - gf$ を入れてできるリー代数 $[FG]$ の微分代数 (FG のリー微分代数という) $\mathrm{Der}_F\,[FG]$ と，群代数 FG の結合代数としての微分代数 $\mathrm{Der}_F\,FG$ の 2 つの微分代数を考えることができる．この論文では，位数 10 の二面体群 $G = D_5$ の場合に，リー微分代数についての考察を行う．

1　Introduction

F を標数 0 の体とする．$A = F[x]$, $F[x, x^{-1}]$ に対して，微分代数 $\mathrm{Der}_F\,A$ はそれぞれ古典的 Witt 代数，centerless Virasoro 代数として良く知られているリー代数となる．その一般化も色々され ([4], [9])，さらにその自己同型群なども良く調べられている ([5], [6])．また，[2] では，A が群代数の場合が調べられている．ブラケット積 $[a, b] = ab - ba$ により A をリー代数と考えたものを $[A]$ と表すとき，$[A]$ のリー代数としての微分 (リー微分) 全体 $\mathrm{Der}_F\,[A]$ についても調べることができるが, [7] では, 位数 6 の二面体群 $G = D_3$ の場合，[8] では, 位数 8 の二面体群 $G = D_4$ の場合をそれぞれ調べ，$\mathrm{Der}_F\,FG$ が $\mathrm{Der}_F\,[FG]$ の直和因子になっていることが分かった．この論文では，位数 10 の二面体群 $G = D_5$ の場合のリー微分代数 $\mathrm{Der}_F\,[FG]$ についての考察を行うことにする．

2 Preliminaries

この論文における記号は [7, 8] のものを使うが，読者の便宜を図り，必要な記号について説明をする．

標数0の体Fに対して，AをF上の結合代数，LをF上のリー代数とする．Aに対して，新しい積$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$ ($\cdot$はAにおける積) による代数を$[A]$で表す (これはF上のリー代数になる ([3, p.6]))．Fの元を成分にもつn次の正方行列全体$M(n, F)$から得られるリー代数を$gl(n, F) = [M(n, F)]$で表し，一般線形リー代数という．また，有限群Gに対して，その元を基底とするF上のベクトル空間に，Gの積を拡張したものを考えて得られる結合代数を群代数といい，FGとかく．

結合代数Aの任意の元 $a, b \in A$に対して

$$\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$$

を満たすAの線形写像δをAの微分といい，その全体を$\mathrm{Der}_F A$とかく．そして，F上のリー代数Lの線形写像δでLの任意の元$x, y \in L$に対して

$$\delta([x, y]) = [\delta(x), y] + [x, \delta(y)]$$

が成り立つものをLの微分といい，その全体も$\mathrm{Der}_F L$とかく．よって，結合代数Aに対しては，$\mathrm{Der}_F A$の元と$\mathrm{Der}_F [A]$の元である2種類の微分を考えることができる．このとき，$\mathrm{Der}_F [A]$の元をAの**リー微分**という (Aの微分はリー微分となっている [7, 命題2.1])．また，$L^2 = sp\{[x, y] \mid x, y \in L\}$，$Z(L) = \{x \in L \mid 任意の y \in L に対して [x, y] = 0\}$を，それぞれ$L$の導来イデアル，$L$の中心といい，ともにリー代数になるが，これらに対して，次の補題はよく知られている ([7, 命題2.1])．

補題 2.1 $\delta \in \mathrm{Der}_F L$に対して，

$$\delta(L^2) \subset L^2, \quad \delta(Z(L)) \subset Z(L)$$

が成り立つ．よって$\delta|_{L^2} \in \mathrm{Der}_F L^2, \delta|_{Z(L)} \in \mathrm{Der}_F Z(L)$である． ■

3 The case of the dihedral group D_5

群 $D_5 = \{e, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$ $(s^2 = r^5 = (sr)^2 = 1)$ が位数 10 の二面体群である．これからできる群代数を以下 $A = FD_5$ とする．

まず，$\mathrm{Der}_F[A]$ について考える．このとき，$L = [A]$ の基底 $\{e, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$ のブラケット積で 0 にならないものは ($[y, x] = -[x, y]$ のタイプを除いて)，次の 30 種類である．

$$
\begin{array}{lll}
[r, s] = sr^4 - sr, & [r, sr] = s - sr^2, & [r, sr^2] = sr - sr^3, \\
[r, sr^3] = sr^2 - sr^4 & [r, sr^4] = sr^3 - s & [r^2, s] = sr^3 - sr^2, \\
[r^2, sr] = sr^4 - sr^3, & [r^2, sr^2] = s - sr^4, & [r^2, sr^3] = sr - s, \\
[r^2, sr^4] = sr^2 - sr, & [r^3, s] = sr^2 - sr^3, & [r^3, sr] = sr^3 - sr^4, \\
[r^3, sr^2] = sr^4 - s, & [r^3, sr^3] = s - sr, & [r^3, sr^4] = sr - sr^2, \\
[r^4, s] = sr - sr^4, & [r^4, sr] = sr^2 - s, & [r^4, sr^2] = sr^3 - sr, \\
[r^4, sr^3] = sr^4 - sr^2, & [r^4, sr^4] = s - sr^3, & [s, sr] = r - r^4, \\
[s, sr^2] = r^2 - r^3, & [s, sr^3] = r^3 - r^2, & [s, sr^4] = r^4 - r, \\
[sr, sr^2] = r - r^4, & [sr, sr^3] = r^2 - r^3, & [sr, sr^4] = r^3 - r^2, \\
[sr^2, sr^3] = r - r^4, & [sr^2, sr^4] = r^2 - r^3, & [sr^3, sr^4] = r - r^4.
\end{array}
$$

よって，L の導来イデアル L^2 は

$$L^2 = \{a_1(r - r^4) + a_2(r^2 - r^3) + \sum b_i sr^i \mid a_i, b_j \in F, \sum b_i = 0\}$$

で，$\dim L^2 = 6$ であることがわかる．次に中心 $Z(L)$ を考えよう．そのために次の補題を利用する．

補題 3.1 群 G が 2 元 x, y で生成されているとし，$A = FG, L = [A]$ とする．このとき，$z \in L$ が L の中心の元であるための必要十分条件は，等式 $[x, z] = [y, z] = 0$ が成り立つことである．

(証明) 等式

$$[xy, z] = [x, z]y + x[y, z]$$

を用いて帰納的に証明できる. ■

これを用いて,

$$e, r + r^4, r^2 + r^3, s + sr + sr^2 + sr^3 + sr^4 \in Z(L)$$

であることが簡単な計算によりわかる. よって, $Z(L)$ の一般の元 z を考えるとき, $z = ar + br^2 + cs + dsr + fsr^2 + gsr^3$ $(a, b, c, d, f, g \in F)$ の形をしていると仮定できる. このとき,

$$0 = [r, z] = c(sr^4 - sr) + d(s - sr^2) + f(sr - sr^3) + g(sr^2 - sr^4)$$
$$= ds + (f - c)sr + (g - d)sr^2 - fsr^3 + (c - g)sr^4$$

より, $d = f = 0$, $f = c$, $g = d$, $c = g$ $\therefore c = d = f = g = 0$. したがって, $z = ar + br^2$ の形と仮定でき, さらに

$$0 = [s, z] = a(sr - sr^4) + b(sr^2 - sr^3) = asr + bsr^2 - bsr^3 - asr^4.$$

よって, $a = b = 0$ となり, $z = 0$. 以上より, 始めに明示した元以外に $Z(L)$ には1次独立なものがないので, $\dim Z(L) = 4$ で

$$Z(L) = sp\{e, r + r^4, r^2 + r^3, s + sr + sr^2 + sr^3 + sr^4\}$$

となる. したがって, $L = L^2 \oplus Z(L)$ となるので, 補題 3.2 より

$$\mathrm{Der}_F L \cong \mathrm{Der}_F L^2 \oplus \mathrm{Der}_F Z(L)$$

が成り立つ. 以上より, 次の定理が成り立つ.

定理 3.1 $G = D_5$, $A = FG$, $L = [A]$ とすると, 次の同型が成り立つ.

$$\mathrm{Der}_F L \cong \mathrm{Der}_F L^2 \oplus gl(4, F).$$

■

$G = D_3, D_4$ の場合は, L^2 が半単純となり, 構造としては非常に簡単であった([7, 8]). $G = D_5$ の場合は, L^2 は半単純とならないことなどをこれから見ていこう. まずは可解でないことから.

命題 3.1　$A = FD_5$, $L = [A]$ とする．このとき，$(L^2)^2 = L^2$ である．

（証明） $s - sr, s - sr^2, s - sr^3 \in L^2$ より，

$$[s - sr, s - sr^2] = -(r^2 - r^3) - (r^4 - r) + (r - r^4)$$
$$= -(r^2 - r^3) + 2(r - r^4) \in (L^2)^2,$$
$$[s - sr, s - sr^3] = -(r^3 - r^2) - (r^4 - r) + (r^2 - r^3)$$
$$= 2(r^2 - r^3) + (r - r^4) \in (L^2)^2$$

なので，$r^2 - r^3, r - r^4 \in (L^2)^2$．そして，$s - sr^4 \in L^2$ であるので，

$$[r^2 - r^3, s - sr] = (sr^3 - sr^2) - (sr^4 - sr^3) - (sr^2 - sr^3) + (sr^3 - sr^4)$$
$$= -2(sr^2 - sr^3) + 2(sr^3 - sr^4) \in (L^2)^2,$$
$$[r^2 - r^3, s - sr^2] = (sr^3 - sr^2) - (s - sr^4) - (sr^2 - sr^3) + (sr^4 - s) \in (L^2)^2$$
$$= -2(sr^2 - sr^3) - 2(s - sr^4) \in (L^2)^2,$$
$$[r^2 - r^3, s - sr^3] = (sr^3 - sr^2) - (sr - s) - (sr^2 - sr^3) + (s - sr)$$
$$= -2(sr^2 - sr^3) + 2(s - sr) \in (L^2)^2,$$
$$[r^2 - r^3, s - sr^4] = (sr^3 - sr^2) - (sr^2 - sr) - (sr^2 - sr^3) + (sr - sr^2)$$
$$= -2(sr^2 - sr^3) + 2(sr - sr^2) \in (L^2)^2,$$
$$[r - r^4, s - sr] = (sr^4 - sr) - (s - sr^2) - (sr - sr^4) + (sr^2 - s)$$
$$= -2(sr - sr^4) - 2(s - sr^2) \in (L^2)^2,$$
$$[r - r^4, s - sr^2] = (sr^4 - sr) - (sr - sr^3) - (sr - sr^4) + (sr^3 - sr)$$
$$= -2(sr - sr^4) - 2(sr - sr^3) \in (L^2)^2,$$
$$[r - r^4, s - sr^3] = (sr^4 - sr) - (sr^2 - sr^4) - (sr - sr^4) + (sr^4 - sr^2)$$
$$= -2(sr - sr^4) - 2(sr^2 - sr^4) \in (L^2)^2,$$
$$[r - r^4, s - sr^4] = (sr^4 - sr) - (sr^3 - s) - (sr - sr^4) + (s - sr^3)$$
$$= -2(sr - sr^4) + 2(s - sr^3) \in (L^2)^2.$$

これらを用いて，$(L^2)^2$ による商空間の計算をしよう．そのために，それぞれの式の s, sr, sr^2, sr^3, sr^4 の係数を並べて行列を作ると，次の８行５列の行列

二面体群 D_5 のリー微分代数について

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 4 & -2 \\ -2 & 0 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

が得られるが，この行列に行の基本変形を行っていくと次の行列が得られる．

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よって，$\dim (L^2)^2 = 4$ であることが分かり，$(L^2)^2 = L^2$ が示せる． ■

これにより，L^2 は可解でないことがわかった．しかし，半単純という訳でもない．

命題 3.2 $A = FD_5, L = [A]$ とする．このとき，L^2 は半単純でない．

(証明) 背理法でこれを証明しよう．半単純だとすると，$\dim L^2 = 6$ なので，

$$L^2 = K_1 \oplus K_2 \ (K_i：3\text{次元単純リー代数})$$

とかける．ここで，$[K_1, K_2] = 0$ であることに注意しておく．簡単な計算で

$$[s - sr, sr^2 - sr^4] = 0,\ [sr^2 - sr^3, sr - sr^4] = 0$$

が成り立つことが分かるが，

$$s - sr = a_1 + a_2,\ \ sr^2 - sr^4 = b_1 + b_2\ \ (a_i, b_i \in K_i)$$

と，成分の和でそれぞれ表したとき，

$$0 = [a_1 + a_2, b_1 + b_2] = [a_1, b_1] + [a_2, b_2]$$

となるので，$[a_1, b_1] = [a_2, b_2] = 0$ だが，K_i は 3 次元単純リー代数なので，$a_1 = 0$ か $b_1 = 0$，そして，$a_2 = 0$ か $b_2 = 0$ が成り立つ．よって，$a_1 = 0, b_2 = 0$ か $a_2 = 0, b_1 = 0$ のいずれかが成り立つ．したがって，

$$s - sr \in K_1, sr^2 - sr^4 \in K_2 \text{ または，} s - sr \in K_2, sr^2 - sr^4 \in K_1$$

のいずれかが成り立つ．同様に，

$$sr^2 - sr^3 \in K_1, sr^2 - sr^4 \in K_2 \text{ または，} sr^2 - sr^3 \in K_2, sr^2 - sr^4 \in K_1$$

のいずれかが成り立つ．したがって，

$$[s - sr, sr^2 - sr^3] = 0,\ \ [s - sr, sr - sr^4] = 0$$

が成り立たないといけないが，簡単な計算により，これらはともに 0 ではないので矛盾が得られる．以上より，L^2 は半単純ではない． ■

References

[1]C. W. Curtis and I. Reiner *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, Interscience, New York, 1962

[2]T. Ikeda and N. Kawamoto *On derivation algebras of group algebras*, Nonassociative Algebras and its Applications,188-192, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994

[3]N. Jacobson *Lie Algebras, Interscience*, New York, 1962

[4]N. Kawamoto *Generalizations of Witt algebras over a field of characteristic zero*, Hiroshima Math. J., **16** (1986), 417-426

[5]— *On G-graded automorphisms of generalized Witt algebras*, Contemp. Math., **184** (1995), 225-230

[6]N. Kawamoto, A. Mitsukawa, K-B. Nam and M-O. Wang *The automorphisms of generalized Witt type Lie algebras*, J. Lie Theory, **13**(2003), 573-578

[7]A. Mitsukawa 群代数のリー微分代数について，福山大学経済学論集，**30**(2006), 29-34

[8]── 群代数のリー微分代数について（2），福山大学経済学論集, **32**(2007), 133-137

[9]K-B. Nam *Generalized W and H type Lie algebras*, Algebra Colloq., **6** (1999), 329-340